

МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой  
функционального анализа  
и операторных уравнений



Каменский М.И.  
подпись, расшифровка подписи  
25.05.2023г.

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**

Б1.О.11 Дифференциальные уравнения

- 1. Шифр и наименование направления подготовки:** 01.03.01 математика
  - 2. Профиль подготовки:** дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление
  - 3. Квалификация выпускника:** бакалавр
  - 4. Форма обучения:** очная
  - 5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины:** функционального анализа и операторных уравнений
  - 6. Составители программы:** Каменский Михаил Игоревич, д.ф.-м.н., профессор
  - 7. Рекомендована:** научно-методическим советом математического факультета, протокол от 25.05.2023, № 0500-06
  - 8. Учебный год:** 2024-2025
- Семестр(ы):** третий

## 9. Цели и задачи учебной дисциплины

Целями освоения учебной дисциплины являются:

- ознакомление студентов с основными понятиями и методами теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

Задачи учебной дисциплины:

- изучение типов уравнений, интегрируемых в квадратурах;
- изучение теорем о существовании и единственности решения задачи Коши;
- изучение теории линейных дифференциальных уравнений;
- знакомство с основными фактами теории устойчивости.

## 10. Место учебной дисциплины в структуре ООП: дисциплина является обязательной частью блока Б1.

Основные дисциплины и их разделы, необходимые для усвоения курса

«Дифференциальные уравнения»:

– «Математический анализ» (производная и дифференциал функции, неопределенный и определенный интегралы, частные производные, непрерывность, формула Тейлора, числовые и функциональные ряды);

– «Алгебра», «Линейная алгебра» (матрицы, определители, теоремы о разрешимости линейных систем).

Дисциплина «Дифференциальные уравнения» является необходимой для усвоения таких дисциплин как: «Уравнения с частными производными», «Численные методы», «Методы оптимизации», «Теоретическая механика».

## 11. Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями) и индикаторами их достижения:

Код	Название компетенции	Коды	Индикаторы	Планируемые результаты обучения
ОПК-1	Способен находить, формулировать и решать актуальные и значимые проблемы фундаментальной математики и ме-	ОПК-1.1	Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук	Знать: основные понятия и определения теории обыкновенных дифференциальных уравнений
		ОПК-1.2	Оценивает и формулирует актуальные и значимые проблемы фундаментальной математики	Уметь: классифицировать уравнения; применять основные методы решения обыкновенных диф-

	ханики	ОПК-1.3	Анализирует и применяет навыки выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний	ференциальных уравнений и их систем Владеть: навыками моделирования практических задач дифференциальными уравнениями; навыками применения качественного анализа решений: навыками выбора методов решения задач
УК-1	Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1	Анализирует проблемную ситуацию как систему, выявляя ее составляющие и связи между ними.	Знать: логико-методологический инструментарий; Уметь: анализировать проблемную ситуацию как систему, выявляя ее составляющие и связи между ними; Владеть: навыками оценивания надежности источников информации, современных концепций философского и социального характера в своей предметной области.
		УК-1.2	Использует логико-методологический инструментарий, критически оценивает надежность источников информации, современных концепций философского и социального характера в своей предметной области	

**2. Объем дисциплины в зачетных единицах/час.**(в соответствии с учебным планом) — 8/288.

**Форма промежуточной аттестации** зачёт и экзамен

### 13. Трудоемкость по видам учебной работы

Вид учебной работы	Трудоемкость		
	Всего	По семестрам	
		№ 3	
Аудиторные занятия	136	136	
в том числе:	лекции	68	68
	практические	68	68
	лабораторные	0	0
Самостоятельная работа	116	116	
Форма промежуточной аттестации (зачёт и экзамен – __ час.)	36	36	
Итого:	288	288	

#### 13.1. Содержание дисциплины

п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины	Реализация раздела дисциплины с
-----	---------------------------------	-------------------------------	---------------------------------

			помощью он-лайн-курса, ЭУМК *
<b>1. Лекции</b>			
1.1	Элементарная теория.	Основные понятия. Уравнения с разделяющимися переменными. Линейные уравнения первого порядка. Уравнения в полных дифференциалах. Замены переменных. О приближенных методах решения. О составлении дифференциальных уравнений.	
1.2	Задача Коши.	Теорема Коши-Пикара. Другие теоремы существования и единственности. Оператор сдвига, простейшие свойства	
1.3	Линейные системы.	Существование и единственность решений линейных систем, оператор сдвига. Фундаментальные системы решений. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами. Линейные системы с постоянными коэффициентами.	
1.4	Устойчивость	Основные понятия теории устойчивости. Устойчивость линейных систем. Теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению. Зависимость решений от начальных значений	
<b>2. Практические занятия</b>			
2.1	Элементарная теория	Уравнения с разделяющимися переменными и приводящиеся к ним, однородные уравнения и приводящиеся к ним, линейные уравнения и уравнения Бернулли, уравнения в полных дифференциалах и интегрирующий множитель, уравнения неразрешенные относительно производной, уравнения допускающие понижения порядка, метод изоклин	
2.2	Задача Коши	Проверка условий теоремы Коши-Пикара в полосе и локальной теоремы Коши-Пикара. Оценка погрешности. Построение интегральной воронки. Проверка свойств оператора сдвига, построения оператора сдвига.	
2.3	Линейные системы	Линейные системы с постоянными коэффициентами, фундаментальные матрицы, линейные уравнения с постоянными коэффициентами.	
2.4	Устойчивость	Устойчивость по определению, устойчивость по первому приближению, критерий Гурвица, особые точки линейных двумерных систем.	
<b>3. Лабораторные занятия</b>			

### 13.2. Темы (разделы) дисциплины и виды занятий

№ п/п	Наименование темы (раздела) дисциплины	Виды занятий (количество часов)				
		Лекции	Практические	Лабораторные	Самостоятельная работа	Всего
	Элементарная теория.	18	20		32	70
	Задача Коши.	16	14		22	52
	Линейные системы.	18	20		32	70
	Устойчивость	16	14		30	60
	Итого:	68	68		116	252

### 14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

В процессе преподавания дисциплины используются такие виды учебной работы, как лекции, практические занятия, а также различные виды самостоятельной работы обучающихся. На лекциях рассказывается теоретический материал, на практических занятиях решаются задачи по теоретическому материалу, прочитанному на лекциях.

Самостоятельная учебная деятельность студентов предполагает выполнение следующих заданий:

1) самостоятельное изучение учебных материалов по разделам 1-4 с использованием основной и дополнительной литературы, информационно-справочных и поисковых систем;

2) подготовку к текущим аттестациям: выполнение домашних заданий, самостоятельное освоение понятийного аппарата по каждой теме.

Вопросы лекционных и практических занятий обсуждаются на занятиях в виде устного опроса – индивидуального и фронтального. При подготовке к лекционным и практическим занятиям, обучающимся важно помнить, что их задача, отвечая на основные вопросы плана занятия и дополнительные вопросы преподавателя, показать свои знания и кругозор, умение логически построить ответ, владение математическим аппаратом и иные коммуникативные навыки, умение отстаивать свою профессиональную позицию. В ходе устного опроса выявляются детали, которые по каким-то причинам оказались недостаточно осмысленными студентами в ходе учебных занятий. Тем самым опрос выполняет важнейшие обучающую, развивающую и корректирующую функции, позволяет студентам учесть недоработки и избежать их при подготовке к промежуточным аттестациям.

Все выполняемые студентами самостоятельно задания подлежат последующей проверке преподавателем. Результаты текущих аттестаций учитываются преподавателем при проведении промежуточной аттестации (3 семестр – зачёт, экзамен).

В случае необходимости перехода на дистанционный режим обучения используется электронный курс «Дифференциальные уравнения» (URL: <https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11906>) на портале «Электронный университет ВГУ».

## 15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины (список литературы оформляется в соответствии с требованиями ГОСТ и используется общая сквозная нумерация для всех видов источников)

а) основная литература:

№ п/п	Источник
1.	<b>Боровских А. В.</b> Лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям : [учебник] / А.В. Боровских, А.И. Перов .— 2-е изд., испр. и доп. — Воронеж : Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2014 .— 548 с.
2.	<b>Филиппов А. Ф.</b> Сборник задач по дифференциальным уравнениям / А.Ф. Филиппов .— М. ; Ижевск : РХД, 2000 .— 174 с.(и предыдущие издания)
3.	Дифференциальные уравнения: план лабораторных занятий (исправленный и доработанный) : методические указания / И. Ф. Леженина, Л. П. Петрова, И. Н. Прядко .— ЭБ ВГУ — Свободный доступ из интранета ВГУ : <a href="http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/m18-46.pdf">http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/m18-46.pdf</a> .
4.	Дифференциальные уравнения : материалы к первой аттестации : учебное пособие для вузов / Воронеж. гос. ун-т; / И.Ф. Леженина [и др.] .— Воронеж : ЛОП ВГУ, 2006 .— Свободный доступ из интранета ВГУ : <a href="http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/may07213.pdf">http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/may07213.pdf</a> .
5.	Дифференциальные уравнения : конспекты лекций, вопросы и задачи. Ч. 1. Элементарная теория / И.Н. Прядко, Л.П. Петрова .— ЭБ ВГУ — Свободный доступ из интранета ВГУ : <a href="http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/m15-219.pdf">http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/m15-219.pdf</a> .
6.	Дифференциальные уравнения [Электронный ресурс] : конспекты лекций, вопросы и задачи. Ч. 2. Задачи Коши /И.Н. Прядко, Л.П. Петрова - ЭБ ВГУ.— Свободный доступ из интранета ВГУ: <a href="http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/m15-220.pdf">http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/m15-220.pdf</a>
7.	Дифференциальные уравнения: конспекты лекций, вопросы и задания. Ч. 3. Линейные уравнения / сост. /Л. П. Петрова, И. Н. Прядко .— ЭБ ВГУ.— Свободный доступ из интранета ВГУ: <a href="http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/m18-80.pdf">http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/m18-80.pdf</a>
8.	Дифференциальные уравнения: конспекты лекций, вопросы и задания. Ч. 4. Устойчивость / И. Н. Прядко, Л. П. Петрова .— ЭБ ВГУ.— Свободный доступ из интранета ВГУ : <a href="http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/m18-81.pdf">http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/m18-81.pdf</a> .

б) дополнительная литература:

№ п/п	Источник
9.	<b>Петровский И. Г.</b> Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений : Учебник для студ. мех.-мат. специальностей ун-тов / И.Г. Петровский ; Под ред. А.Д.

	<i>Мышкиса, О.А. Олейника .— М. : Изд-во Моск. ун-та, 1984 .— 295 с.</i>
10.	<b>Красносельский М. А.</b> <i>Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений / М.А. Красносельский .— М. : Наука, 1966 .— 331 с</i>
11.	<b>Понтрягин Л. С.</b> <i>Обыкновенные дифференциальные уравнения : учебник для студ. мат. спец. ун-тов / Л.С. Понтрягин .— 5-е изд. — М. : Наука, 1982 .— 331 с</i>
12.	<b>Тихонов А. Н.</b> <i>Дифференциальные уравнения : Учебник для студ. вузов, обуч. по спец. "Физика" и "Прикладная математика" / А. Н. Тихонов, А. Б. Васильева, А. Г. Свешников .— 3-е изд. — М. : Наука : Физматлит, 1998 .— 231 с.</i>

в) информационные электронно-образовательные ресурсы (официальные ресурсы интернет)\*:

№ п/п	Ресурс
13.	Электронный Каталог ЗНБ ВГУ <a href="https://lib.vsu.ru/zgate?Init+lib.xml.simple.xsl+rus">https://lib.vsu.ru/zgate?Init+lib.xml.simple.xsl+rus</a>
14.	Образовательный портал "Электронный университет ВГУ"

\* Вначале указываются ЭБС, с которыми имеются договора у ВГУ, затем открытые электронно-образовательные ресурсы, онлайн-курсы, ЭУМК

## 16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы (учебно-методические рекомендации, пособия, задачки, методические указания по выполнению практических (контрольных), курсовых работ и др.)

№ п/п	Источник
1.	<b>Боровских А. В.</b> <i>Лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям : [учебник] / А.В. Боровских, А.И. Перов .— 2-е изд., испр. и доп. — Воронеж : Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2014 .— 548 с.</i>
2.	<b>Филиппов А. Ф.</b> <i>Сборник задач по дифференциальным уравнениям / А.Ф. Филиппов .— М. ; Ижевск : РХД, 2000 .— 174 с.</i>
3.	<i>Дифференциальные уравнения: план лабораторных занятий (исправленный и доработанный) : методические указания / И. Ф. Леженина, Л. П. Петрова, И. Н. Прядко .— ЭБ ВГУ — Свободный доступ из интрасети ВГУ :<a href="http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/m18-46.pdf">http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/m18-46.pdf</a>.</i>
4.	<i>Дифференциальные уравнения : материалы к первой аттестации : учебное пособие для вузов / Воронеж. гос. ун-т; / И.Ф. Леженина [и др.] .— Воронеж : ЛОП ВГУ, 2006 .— Свободный доступ из интрасети ВГУ : <a href="http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/may07213.pdf">http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/may07213.pdf</a>.</i>
5.	<i>Дифференциальные уравнения : конспекты лекций, вопросы и задачи. Ч. 1. Элементарная теория / И.Н. Прядко, Л.П. Петрова .— ЭБ ВГУ — Свободный доступ из интрасети ВГУ :<a href="http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/m15-219.pdf">http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/m15-219.pdf</a>.</i>
6.	<i>Дифференциальные уравнения [Электронный ресурс] : конспекты лекций, вопросы и задачи. Ч. 2. Задачи Коши /И.Н. Прядко, Л.П. Петрова - ЭБ ВГУ.— Свободный доступ из интрасети ВГУ:<a href="http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/m15-220.pdf">http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/m15-220.pdf</a></i>
7.	<i>Дифференциальные уравнения: конспекты лекций, вопросы и задания. Ч. 3. Линейные уравнения / сост. /Л. П. Петрова, И. Н. Прядко .— ЭБ ВГУ.— Свободный доступ из интрасети ВГУ:<a href="http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/m18-80.pdf">http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/m18-80.pdf</a></i>
8.	<i>Дифференциальные уравнения: конспекты лекций, вопросы и задания. Ч. 4. Устойчивость / И. Н. Прядко, Л. П. Петрова .— ЭБ ВГУ.— Свободный доступ из интрасети ВГУ :<a href="http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/m18-81.pdf">http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/m18-81.pdf</a>.</i>

## 17. Образовательные технологии, используемые при реализации учебной дисциплины, включая дистанционные образовательные технологии (ДОТ), электронное обучение (ЭО), смешанное обучение):

Информационная лекция, практическое занятие, лекция-визуализация, практическое занятие в форме презентации, самостоятельное изучение лекционного материала на основе предлагаемых электронных учебников, практическое домашнее задание, контрольная работа, экзамен

**18. Материально-техническое обеспечение дисциплины:** Учебная аудитория для проведения занятий лекционного и семинарского типа, текущего контроля и промежуточной аттестации; специализированная мебель.

### **19. Оценочные средства для проведения текущей и промежуточной аттестаций**

Порядок оценки освоения обучающимися учебного материала определяется содержанием следующих разделов дисциплины:

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенция(и)	Индикатор(ы) достижения компетенции	Оценочные средства
1.	Элементарная теория	ОПК-1, УК-1	ОПК-1.1, ОПК-1.2, ОПК-1.3, УК-1.1, УК-1.2	КИМ – контрольная работа 1
2.	Задача Коши	ОПК-1, УК-1	ОПК-1.1, ОПК-1.2, ОПК-1.3, УК-1.1, УК-1.2	КИМ – контрольная работа 1
3.	Линейные системы	ОПК-1, УК-1	ОПК-1.1, ОПК-1.2, ОПК-1.3, УК-1.1, УК-1.2	КИМ – контрольная работа 2,
4.	Устойчивость	ОПК-1, УК-1	ОПК-1.1, ОПК-1.2, ОПК-1.3, УК-1.1, УК-1.2	КИМ – контрольная работа 2
Промежуточная аттестация форма контроля – зачёт и экзамен				Перечень вопросов Практическое задание

### **20 Типовые оценочные средства и методические материалы, определяющие процедуры оценивания**

#### **20.1 Текущий контроль успеваемости**

Текущая аттестация проводится в соответствии с Положением о текущей аттестации обучающихся по программам высшего образования Воронежского государственного университета.

Текущая аттестация проводится в форме контрольных работ, презентаций и проверки домашнего задания, содержание которых приведено ниже. Домашнее задание выполняется каждым студентом самостоятельно и обсуждается на следующем занятии. Студенты тренируются дома строит поле направлений с помощью прикладных пакетов или создают свои программы и демонстрируют результаты на занятии. В ходе контрольной работы обучающемуся выдается КИМ с практическим перечнем заданий и предлагается решить данные задания. В ходе выполнения заданий нельзя пользоваться средствами связи (включая сеть Интернет), но можно пользоваться любыми печатными и рукописными материалами, ограничение по времени — 90 астрономических минут.

1. Перечень домашних заданий приведён в методичке *“Дифференциальные уравнения: план лабораторных занятий (исправленный и доработанный): методические указания”*

2. Примеры контрольных работ

#### **Пример контрольной работы № 1**

Решить уравнения

1.  $y' - y^4 \cos x = y \operatorname{tg} x$

2.  $(x - y \cos \frac{y}{x}) dx + x \cos \frac{y}{x} dy = 0$

3.  $(x^2 + y^2 + y) dx + (2xy + x + e^y) dy = 0$

4.  $3y'^4 = y' + y$

5. Покажите, что задача Коши

$$x' = (\operatorname{tg} t) \cdot \sin(t+x), \quad x(0) = 0$$

имеет на интервале  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  единственное решение.

### Пример контрольной работы № 2

1. Найти все положения равновесия и исследовать их на устойчивость

$$\begin{cases} \dot{x} = (x+1)(y-1), \\ \dot{y} = xy + 2. \end{cases}$$

2. Найти частное решение уравнения

$$y^{(4)} + 4y''' + 7y'' + 6y' + 2y = e^{-x}$$

и исследовать его на устойчивость.

3. Решить уравнение

$$y^{(5)} - 2y^{(4)} + 2y''' - 4y'' + y' - 2y = 0$$

4. 3. Решить систему:

$$\begin{cases} x' = 3y - x + 4t, \\ y' = 3y - x + 2 \end{cases}$$

и найти  $\bar{g}_0^t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

5. Для системы линейных уравнений определить тип особой точки, построить эскиз фазового портрета, определить направления движения

$$\begin{cases} \dot{x} = -3x + 2y, \\ \dot{y} = x - 4y. \end{cases}$$

Критерии оценивания компетенций	Уровень сформированности компетенций	Шкала оценок
Обучающийся в полной мере умеет классифицировать уравнения и применять основные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений и их систем; владеет навыками моделирования практических задач дифференциальными уравнениями и исследования свойств решений обыкновенных дифференциальных уравнений и их систем. Верно выполнены все задания контрольной работы.	<i>Повышенный уровень</i>	отлично
Обучающийся в целом умеет классифицировать уравнения и применять основные методы решения	<i>Базовый уровень</i>	хорошо



обыкновенных дифференциальных уравнений и их систем; владеет навыками моделирования практических задач дифференциальными уравнениями и исследования свойств решений обыкновенных дифференциальных уравнений и их систем. В решениях допущены незначительные ошибки или правильно выполнены четыре из пяти заданий.		
Обучающийся фрагментарно способен классифицировать уравнения и применять основные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений и их систем, не умеет исследовать дифференциальные уравнения или допускает существенные ошибки. В решениях допущены существенные ошибки или правильно выполнены три из пяти заданий	<i>Пороговый уровень</i>	удовлетворительно
Обучающийся демонстрирует отрывочные, фрагментарные знания, допускает грубые ошибки.	–	неудовлетворительно

## 20.2 Промежуточная аттестация

Промежуточная аттестация по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств:

*Собеседование по экзаменационным билетам*

Зачет ставится по результатам контрольных работ.

№№ п/п	Темы к текущей аттестации (экзамену)
1.	Основные определения.
2.	Теорема об уравнении с разделенными переменными.
3.	Утверждение об общем решении ЛОУ.
4.	Свойства решений ЛУ.
5.	Утверждение о различных трактовках симметричного уравнения.
6.	Теорема об интегрировании УПД.
7.	Признак полного дифференциала и алгоритм нахождения ПФ.
8.	Уравнение колебательного контура.
9.	Математическая модель системы «хищник-жертва».
10.	Уравнение маятника.
11.	Метод изоклин (пример).
12.	Метод ломаных Эйлера (пример).
13.	Формулировка теоремы Коши–Пикара.
14.	Лемма об эквивалентном интегральном уравнении.
15.	Определение последовательных приближений.
16.	Лемма о сближении
17.	Лемма о сходимости
18.	Оценка погрешности
19.	Лемма о сходимости
20.	Формулировка теоремы Коши–Пикара с переменной константой Липшица.

21.	Формулировка локальной теоремы Коши–Пикара.
22.	Теорема Коши–Пикара для уравнения $n$ -го порядка.
23.	Формулировка теоремы Пеано; интегральная воронка.
24.	Теорема Коши–Пикара для комплексной нормальной системы.
25.	Оператора сдвига для (НС) и (НАС).
26.	Теорема об ОС для ЛОС.
27.	Теорема о структуре множества решений ЛОС.
28.	Утверждение о решениях и ОС для ЛС.
29.	Теорема о фср ЛАОС.
30.	Теорема о выделении вещественных решений.
31.	Сведение уравнения $n$ -го порядка к системе.
32.	Общее решение ЛНУн.
33.	Теорема о фср ЛАОУн.
34.	Основные определения теории устойчивости.
35.	Утверждение о приведенной системе.
36.	Критерий устойчивости ЛС
37.	Критерий устойчивости ЛСПК.
38.	Критерий Гурвица.
39.	Критерий Михайлова
40.	Теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению.
41.	Теорема Ляпунова о неустойчивости по первому приближению.

### Примеры практических заданий на экзамене

- Исследуйте на устойчивость нулевое решение дифференциального уравнения, если оператор сдвига для него задается формулой  $g_1^t x_0 = \frac{x_0}{t}$ ,  $t \in [1, +\infty)$
- Верно ли следующее утверждение: если уравнение  $x' = f(t, x)$  есть следствие уравнения  $x' = g(t, x)$ , то любое решение первого уравнения является решением второго? А наоборот?

Контрольно-измерительные материалы промежуточной аттестации включают в себя теоретические вопросы, позволяющие оценить уровень полученных знаний и практическое задание, позволяющее оценить степень сформированности умений и навыков. КИМ содержит два теоретических вопроса и одно практическое задание. По желанию обучающегося практическое задание может быть заменено на следующее задание, выполняемое в течение семестра: найти практическую задачу, сводящуюся к дифференциальным уравнениям и представить её компьютерную модель.

Критерии оценивания компетенций	Уровень сформированности компетенций	Шкала оценок
<i>Обучающийся в полной мере владеет теоретическими основами дисциплины, умеет связать теорию с практикой, классифицировать уравнения и применять основные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений и их систем; владеет навыками моделирования практических задач дифференциальными уравнениями и исследования свойств решений обыкновенных дифференциальных уравнений и их систем.</i>	<i>Повышенный уровень</i>	<i>Отлично</i>
<i>Обучающийся владеет теоретическими основами дисциплины; в</i>	<i>Базовый</i>	<i>Хорошо</i>

целом, умеет связать теорию с практикой, классифицировать уравнения и применять основные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений и их систем, владеет навыками моделирования практических задач дифференциальными уравнениями и исследования свойств решений обыкновенных дифференциальных уравнений и их систем, но допускает незначительные ошибки, неточности, испытывает затруднения при решении практических задач	уровень	
Обучающийся частично владеет теоретическими основами дисциплины, фрагментарно способен классифицировать уравнения и применять основные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений и их систем, не умеет исследовать дифференциальные уравнения или допускает существенные ошибки, не умеет связать теорию с практикой.	Пороговый уровень	Удовлетворительно
Обучающийся демонстрирует отрывочные, фрагментарные знания, допускает грубые ошибки.	–	Неудовлетворительно

### 20.3 Фонд оценочных средств сформированности компетенций студентов, рекомендуемый для проведения диагностических работ

#### 1) закрытые задания (тестовые, средний уровень сложности):

1. Введение параметра  $p = y'$  рекомендуется для решения уравнения

ОТВЕТ: 1)

Решение: Введение параметра  $p = y'$  рекомендуется для решения уравнения первого порядка неразрешенного относительно производной, в случае, когда разрешить его относительно производной сложно, но можно представить в виде:  $y = f(x, y')$  или  $x = f(y, y')$ .

$$1) y = \sqrt{x} - \sin y' + y'$$

$$2) y' = y\sqrt{x} - \sin x + 2y^2$$

$$3) y' = \sqrt{x} \sin y$$

2. Частные решения, каких уравнений могут быть найдены только методом вариации произвольных постоянных?

Ответ: 1) и 3)

Решение: Линейное неоднородное уравнение, правая часть которого не имеет специальный вид, решается только методом вариации произвольных постоянных. Правая часть уравнения  $y'' + 4y = 2\operatorname{tg}x$  и

$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2 + 1}$  не специального вида, поэтому используется метод вариации произвольных постоянных.

$$1) y'' + 4y = 2\operatorname{tg}x$$

$$2) y'' + 2y' - 3y = x^2 e^x$$

$$3) y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2 + 1}$$

$$4) y'' - 9y' = e^{3x} \cos x$$

3. Для линейного однородного дифференциального уравнения  $y'' - 5y' + 4y = 0$  фундаментальную систему решений образуют функции...

Ответ: 1) и 4)

Решение: Для линейного однородного дифференциального уравнения  $y'' - 5y' + 4y = 0$  корни характеристического уравнения имеют вид  $\lambda_1 = 4$  и  $\lambda_2 = 1$ . Так как корни простые действительные, то фундаментальная система решений имеет вид  $y_1 = e^{4x}$  и  $y_2 = e^{1x}$ . Соответственно для нашего случая  $y_1 = e^{4x}$  и  $y_2 = e^x$

1)  $y = e^{4x}$

2)  $y = e^{-5x}$

3)  $y = e^{5x}$

4)  $y = e^x$

4. Для какого уравнения функция  $\mu = e^y$  является интегрирующим множителем ?

Ответ: 3)

Решение: Интегрирующим множителем для уравнения  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ , называется такая функция  $\mu(x, y) \neq 0$ , после умножения, на которую дифференциальное уравнение преобразуется в уравнение в полных дифференциалах. При умножении  $\cos x dx - (y - \sin x)dy = 0$  на  $\mu = e^y$  получаем уравнение в полных дифференциалах  $e^y \cos x dx - e^y (y - \sin x)dy = 0$

1)  $xy dx + (1 + x^2)dy = 0$

2)  $y dx - (y^2 + 3x) dy = 0$

3)  $\cos x dx - (y - \sin x)dy = 0$

5. Какие из перечисленных уравнений являются уравнениями в полных дифференциалах?

Ответ: 3) и 4)

Решение: Уравнение вида  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ , для которого выполняется  $\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}$  является уравнением в полных дифференциалах.

1)  $y' - y^4 \cos x = y \tan x$

2)  $(x - y \cos \frac{y}{x})dx + x \cos \frac{y}{x} dy = 0$

3)  $(x^2 + y^2 + y)dx + (2xy + x + e^y)dy = 0$

4)  $y \cos x dx - (2y - \sin x)dy = 0$

2) открытые задания (тестовые, повышенный уровень сложности):

1. Определить тип особой точки системы

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = 2x - y \end{cases}$$

Ответ: седло

Решение: Найдем корни характеристического уравнения:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-1-\lambda),$$

$(1-\lambda)(-1-\lambda) = 0$ ,  $\lambda_1 = 1 > 0$ ,  $\lambda_2 = -1 < 0$ . Следовательно, особая точка седло.

2. Определить тип особой точки уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x-y}{x-y}$$

Ответ: центр

Решение: найдем корни характеристического уравнения:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-1-\lambda) + 2,$$

$\lambda^2 + 1 = 0$ ,  $\lambda_1 = \pm i$ . Следовательно, особая точка центр.

3. Исследовать на устойчивость нулевое решение уравнения

$$2y'''' + y'' + 2y' + 3y = 0$$

Ответ: неустойчиво

Решение: Выпишем матрица Гурвиц:  $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

Вычислим её главные диагональные миноры:  $\Delta_1 = 2 > 0$ ,  $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -4 < 0$ . Следовательно, по критерию Рауса-Гурвица нулевое решение неустойчиво.

4. Определить тип уравнения

$$y' = \frac{y}{x} (\ln y - \ln x)$$

Ответ: однородное

Решение: Уравнение вида  $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$  или  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ , которое не изменяется при одновременной замене «x» на «kx» и «y» на «ky», называется однородным.

5. Указать наибольшее целое  $a$ , при котором асимптотически устойчиво нулевое решение систе-

$$\text{мы} \begin{cases} x' = ax + y + x^2, \\ y' = x + ay + y^2 \end{cases}$$

Ответ: -2

Решение: Матрица линеаризованной системы имеет вид  $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ . Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & 1 \\ 1 & a-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)(a-\lambda) - 1,$$

$(\lambda - a)^2 - 1 = 0$ ,  $\lambda_1 = a + 1$ ,  $\lambda_2 = a - 1$ . Для асимптотическое устойчивости корни характеристического уравнения должны быть отрицательны:  $a + 1 < 0$ .

### Критерии и шкалы оценивания заданий ФОС:

1) Задания закрытого типа (выбор одного варианта ответа, верно/неверно):

- 1 балл – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.

2) Задания закрытого типа (множественный выбор):

- 2 балла – указаны все верные ответы;
- 0 баллов — указан хотя бы один неверный ответ.

3) Задания закрытого типа (на соответствие):

- 2 балла – все соответствия определены верно;
- 0 баллов – хотя бы одно сопоставление определено неверно.

4) Задания открытого типа (короткий текст):

- 2 балла – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.

5) Задания открытого типа (число):

- 2 балла – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.

**Задания раздела 20.3 рекомендуются к использованию при проведении диагностических работ с целью оценки остаточных результатов освоения данной дисциплины (знаний, умений, навыков).**